ـ أثبات برهنة لورانت :

نتكن C نقطة r مع الزمن من نظام النظام الحلقي الواقعين الدائرين المحيطين بالمركز C₁ ، C₂ الذي مركزها المشترك هو النقطة z₀

ولتكن K هي الدائرة التي تحيط بالنقطة z حيث أن φ₁ = K∩C₂ و φ₂ = K∩C₁ M

وإذا وضعنا r = |z - z₀| عندئذ يكون r₁ > r > r₂

ونرمز بـ S للنقاط C₁ و K عندئذ تكون الدالة $\frac{f(s)}{s-z}$ تحليلية

~~الدالة تحليلية~~ حسب برهنة كوشي حوراس للحاصلات - المتعددة الدوائر فإن

$$\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} \, ds = \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} \, ds + \int_{K} \frac{f(s)}{s-z} \, ds$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{f(s)}{s-z} \, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} \, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}$$

لما أن f تحليلية مع وضعنا z النقطة z تقع داخلية K عندئذ

بصيغة تكامل كوشي فإن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{f(s)}{s-z} \, ds = f(z)$$

أي أن

① $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} \, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} \, ds$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

|z - z₀| < |s - z₀|

$\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < 1$

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n+1} \qquad |c| < 1$$

وأيضاً على $\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < 1$ فإن

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0}\left\{ 1 + \frac{1}{s-z_0}(z-z_0) + \frac{1}{(s-z_0)^2}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{1}{(s-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^{n+1} \right.$$

$$+ \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} \cdot \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n}$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} + \frac{1}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \frac{1}{(s-z_0)^3}(z-z_0)^2$$

$$+ \frac{1}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1} + \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z)^n}$$

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \frac{f(s)}{(s-z_0)^3}(z-z_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f(s)}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1} + \frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z)} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z)^n}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{s-z_0}ds + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds\,(z-z_0)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^3}ds(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}ds(z-z_0)^{n-1}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z_0)}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z)^n}ds$$

هذه المعادلة يمكن أن تكتب باختصار على النحو التالي:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}ds = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + R_n(z)$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds \qquad \forall\, n=0,1,\cdots \qquad \text{(الباقي النوني)}$$

لنبين الآن أن $R_n(z)$ تسعى نحو الصفر عندما $n \to \infty$ تسعى نحو مطلقة

النهاية بجوار z دالة f تحليلية على C_1 عندئذ تبلغ نهاية العظمى

ولتكن M أي أن $|f(s)| \leq M \qquad \forall s \in C_1$

$$|z-z_0|^n = r^n \qquad\qquad |s-z_0|^n = r_1^n$$

$$|s-z_0| - |z-z_0| \geq |s-z_0| - |z-z_0| = r_1 - r$$

وضعنا فإن $\oint_c |ds| = 2\pi i$, و $\frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} < \frac{1}{r_0-r}$

وبالتالي فإن ،

$$|R_n(z)| \leq \frac{M\, 2\pi r_i\, N^n}{2\pi(r_1-r) r_i^n} = \frac{M r_i}{r_1-r}\left(\frac{r}{r_i}\right)^n$$

وبما أن $\frac{r}{r_1} < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n = 0$

وبهذا نستنتج بأن $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-s} = \frac{1}{z-z_0-(s-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}}$$

وكذلك نحصل على نفس النتيجة أي أن

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-z_0}\left\{1+\frac{1}{(s-z_0)^1}\frac{1}{(z-z_0)} + \frac{1}{(s-z_0)^2}\frac{1}{(z-z_0)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(s-z_0)^3}\frac{1}{(z-z_0)^3}+\cdots+\frac{1}{(s-z_0)^{n-1}}\frac{1}{(z-z_0)^{n-1}}+\frac{1}{1-\frac{s-z}{z-z}}\frac{(s-z)^n}{(z-z_0)^n}\right\}$$

$$= \frac{1}{z-z_0}+\frac{1}{(s-z_0)^1}\frac{1}{(z-z_0)^2}+\frac{1}{(s-z_0)^2}\frac{1}{(z-z_0)^3}+\cdots+\frac{1}{(s-z_0)^{n-1}}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$+\frac{1}{z-s}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{R(s)}{s-z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} f(s)\,ds\,\frac{1}{z-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)}\,ds\,\frac{1}{(z-z_0)^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}\,ds\,\frac{1}{(z-z_0)^3}+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n-1}}\,ds\,\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)^n}\oint_{c_2}\frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}$$

وتكتب هذه المعادلة باختصار مع الجزء الثاني

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_3}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$+ Q_n(z)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \quad , \quad n = 1, 2 \cdots$$

لنثبت الآن أن $Q_n(z)$ تسعى نحو الصفر عندما يسعى n نحو النهاية
لنفرض أن M_1 هي قيمة عظمى لـ f على C_2 أي أن $|f(s)| \leq M_1$ بحيث أن
$|z-z_0|^n = r^n$ $|s-z_0|^n = r_2^n$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-z_0)^n} \int_{C_2} \frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s} ds$$

$$|z-s| = |z-z_0 \cdot (s-z_0)| \geq r-r_2 \implies \frac{1}{|s-z|} \leq \frac{1}{r-r_2}$$

وبالتالي فإن

$$|Q_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r_2}{r^n} \cdot \frac{m_1 r_2^n}{r-r_2}$$

$$|Q_n(z)| \leq \frac{m_1 r_2}{r-r_2} \left(\frac{r_2}{r}\right)^n$$

$$\frac{r_2}{r} < 1 \quad \text{ وبما أن } \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r_2}{r}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(z) = 0 \quad \text{ نستنتج أن}$$

أي أن :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

$$+ \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} +$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_r (z-z_0)^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad r_2 < |z-z_0| < r_1$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \qquad -\; n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}} ds \qquad -\; n=1,2,\dots$$

مثال 1 أوجد منشور الدالة $\quad f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$

في المنطقة $\quad 2 > |z| > 1$

الحل :

~~يكيكيكي~~

مركز النشر هو $z_0=0$ والمنطقة الحلقية المحصورة بين الدائرتين c_1 , c_2

حيث $\quad 2 < r_1 > r > r_2 > 1$ عندئذٍ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-0)^n} \quad ; \quad 1 < r_2 \le |z-0| < r_1 \le 2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{(z-0)^{n+1}} dz \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z-1} dz = \left[\frac{1}{z-2}\right]_{z=1} = -1$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z^2} dz$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} dz$$

لاحظ بأن $z_0=0$ و $z=1$ يقعان في داخلية c_1

~~بينما~~ $z=2$ يقع بالخارج وكذلك $z=1$ بالنسبة لـ c_2 فقط $z_0 = 0$ داخل c_2

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} \frac{\overline{\frac{(z-1)(z-2)}{z}}}{z}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_4} \frac{\overline{\frac{z(z-2)}{z-1}}}{z-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=0} + \frac{1}{z(z-2)}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z^3}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} \frac{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}{z^2}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_4} \frac{\frac{1}{z^2(z-2)}}{(z-1)}\, dz$$

$$= \frac{1}{1!}\left[\frac{1}{z^2-3z+2} \right]'_{z=0} + \frac{1}{z^2(z-2)}\bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}\bigg|_{z=0} + \frac{1}{-1} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$* \, b_0$ / b_1

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-0)^{-n+1}}\, dz$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{(z)^{-1+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{z}{(z-1)(z+2)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{z}{z-2}}{z-1}\, dz = \frac{z}{z-2}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-1)}}{z^{-1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{z^2}{z-2}}{z-1}\, dz = \frac{z^2}{z-2}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z-2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{z^3}{(z-1)(z-2)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\frac{z^3}{(z-2)}}{(z-1)}\, dz$$

$$= \frac{z^3}{(z-2)} \bigg|_{z=1} = -1$$

$$f(z) = -1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{8}z^3 + \cdots + \frac{1}{2^n}z^n + \cdots$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z_3} \cdots - \frac{1}{z^n} \cdots , \quad 1 < |z| < 2$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} , \quad 1 < |z| < 2$$

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

$$\frac{z}{z-2} = A + \frac{B(z-1)}{z-2}$$

لنعوض عن حل z ب 1 فنجد أن

$$\frac{1}{1-2} = A \implies A = -1$$

$$\frac{z}{z-1} = \frac{A(z-2)}{z-1} + B$$

لنعوض عن حل z ب 2 فنجد أن

$$B = 2$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{z}{z}-1} = -\frac{1}{2} \boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} - \boxed{\frac{1}{1-\frac{z}{2}}}$$

$$\underbrace{\quad}_{\frac{1}{1+c}} \qquad \underbrace{\quad}_{\frac{1}{1+c}}$$

$$f(z) = -\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots + \frac{z^n}{2^n} + \cdots \right]$$

$$-\frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots \right]$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$